

Riemann-sommen¹

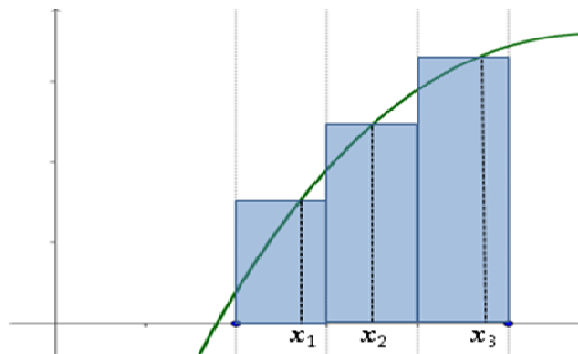
1 Achtergrond en methode om Riemann-sommen te berekenen met TI rekentoestellen.

1.1 Definities en notaties

1. Een willekeurige Riemann-som van een functie f voor $n \in \mathbf{N}_0$ verdelingen van het interval $[a, b]$ is het getal:

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

$$\text{met } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ en } x_i \in [a + (i-1)\Delta x; a + i\Delta x]$$

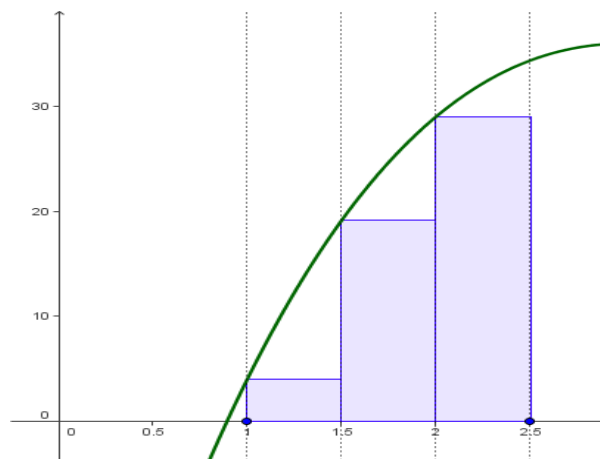


2. Een Riemann-ondersom van een functie f voor $n \in \mathbf{N}_0$ verdelingen van het interval $[a, b]$ is het getal:

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

$$\text{met } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ en } x_i \in [a + (i-1)\Delta x; a + i\Delta x]$$

$$\text{en } \forall x \in [a + (i-1)\Delta x; a + i\Delta x] : f(x_i) \leq f(x) \text{ en } 1 \leq i \leq n$$



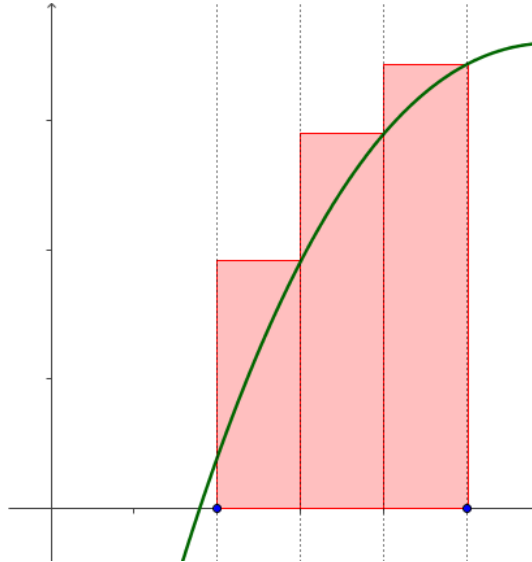
¹ Auteur: Bernard Folens, Sint-Aloysiuscollege Menen

3. Een Riemann-bovensom van een functie f voor $n \in \mathbf{N}_0$ verdelingen van het interval $[a, b]$ is het getal:

$$\underline{s}_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

$$\text{met } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ en } x_i \in [a + (i-1)\Delta x; a + i\Delta x]$$

$$\text{en } \forall x \in [a + (i-1)\Delta x; a + i\Delta x] : f(x_i) \geq f(x) \text{ en } 1 \leq i \leq n$$



1.2 Eigenschappen

Stel dat f een functie is en het interval $[a, b]$ onderverdeeld is in n deelintervallen.

1. $\forall n \in \mathbf{N}_0 : \underline{s}_n \leq s_n \leq S_n$

Immers voor elke term van een van de sommen

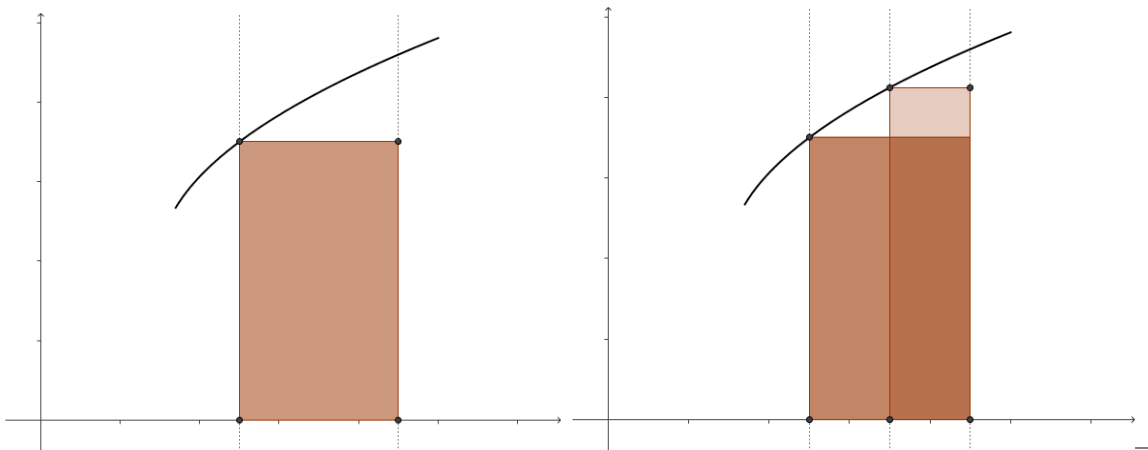
$$\underline{s}_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = f(x_1^{\min}) \cdot \Delta x + f(x_2^{\min}) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n^{\min}) \cdot \Delta x$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = f(x_1^{\max}) \cdot \Delta x + f(x_2^{\max}) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n^{\max}) \cdot \Delta x$$

geldt: $f(x_i^{\min}) \leq f(x_i) \leq f(x_i^{\max})$ met $1 \leq i \leq n$

2. $\underline{s} = \{\underline{s}_n : n \in \mathbf{N}_0\}$ is een stijgende rij



- $S = \{S_n : n \in \mathbf{N}_0\}$ is een dalende rij
- een willekeurig bovensom S_n ($n \in \mathbf{N}_0$) is een bovengrens voor de rij van ondersonnen \underline{s} .

Want, indien $k < n < p$ geldt er:

Ondersonnen met minder verdelingen: $\underline{s}_k \leq \underline{s}_n \leq S_n$ (O.S. vormen stijgende rij)

Ondersonnen met meer verdelingen: $\underline{s}_p \leq S_p \leq S_n$ (B.S. vormen dalende rij)

- Gevolg: de rij \underline{s} heeft een supremum.
- een willekeurig onderson \underline{s}_n ($n \in \mathbf{N}_0$) is een ondergrens voor de rij van bovensommen S
- Gevolg: de rij S heeft een infimum.

$$8. \sup(\underline{s}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \inf(S) = \int_a^b f(x).dx$$

1.3 Illustratie.

Opmerking.

In wat volgt wordt met tussensom de Riemann-som bedoeld die ontstaat door beelden te nemen van de middens van elk deelinterval.

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 29$ over het interval is $[1,4]$.

n	\underline{s}_n	S_n	S_n
10	70,1325	74,28375	78,2325
75	73,7088	74,2506	74,7888
120	73,91203125	74,25023438	74,58703125
250	74,087892	74,250054	74,411892
350	74,13423061	74,25002755	74,36565918
500	74,168973	74,2500135	74,330973
1000	74,20949325	74,25000338	74,29049325

$$\sup(\underline{s}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \inf(S) = \int_1^4 (x^3 - 9x^2 + 15x + 29).dx$$

1.4 Riemann-sommen met TI-grafische rekentoestellen.

- Als f alleen stijgt of alleen daalt over het interval $[a, b]$ dan is de rij $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ in een O.S., een T.S. of een B.S. een rekenkundige rij met verschil Δx

Er geldt: $x_i = x_{i-1} + \Delta x$

- Begintermen.

De begintermen van deze rekenkundige rijen zijn echter voor O.S. en B.S. verschillend bij stijgende of dalende functies. Voor tussensommen is de start steeds gelijk.

	O.S.	T.S.	B.S.
Stijgende functie	$x_1=a$	$x_1=a + \Delta x/2$	$x_1=a + \Delta x$
Dalende functie	$x_1=a + \Delta x$	$x_1=a + \Delta x/2$	$x_1=a$

- Input en syntax van het rekentoestel

Opmerking:

In het grafisch rekentoestel is n de veranderlijke index.

We stellen het totaal aantal verdelingen daarom ook voor met p .

$$s_p = \sum_{i=1}^p f(x_i) \cdot \Delta x = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_p) \cdot \Delta x \text{ en } \Delta x = \frac{b-a}{p}$$

- Na invoeren van het functievoorschrift moet de **MODE** ingesteld worden op **SEQ** zodat rijen kunnen gedefinieerd worden.
- Δx wordt gestockeerd in geheugen D
- De rekenkundige rij $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ wordt gedefinieerd in de rijvariabele u
- $u(nMin) = a + \xi \cdot \Delta x$ met $0 \leq \xi \leq 1$
- De rij v bevat $f(x_n) \cdot \Delta x$ (georiënteerde oppervlakte boven/onder het n-de interval **PLUS** de som van alle georiënteerde oppervlakten boven/onder de voorgaande intervallen.

Dit levert de volgende schermen:

<pre> Plot1 Plot2 Plot3 nMin=1 ·u(n)⊖u(n-1)+0 u(nMin)⊖ ·v(n)=■ v(nMin)= ·w(n)= w(nMin)= </pre>	<pre> Plot1 Plot2 Plot3 nMin=1 ·u(n)⊖u(n-1)+0 u(nMin)⊖1+0/2 ·v(n)= v(nMin)= ·w(n)= w(nMin)= </pre>
<pre> Plot1 Plot2 Plot3 nMin=1 ·u(n)⊖u(n-1)+0 u(nMin)⊖(1.261... ·v(n)⊖DY₁(u)+v(n -1) v(nMin)⊖DY₁(1+ ·w(n)= </pre>	

Begeleid Zelfstandig Leren (BZL)

De Bepaalde Integraal – Riemannsommen ¹

1	Rijvariabelen u en v van het grafisch rekentoestel.....	7
1.1	Rijen.....	7
1.2	Opdracht 1.....	7
1.3	Rekentoestel.....	8
1.4	Opdracht 2.....	9
1.5	Opdracht 3.....	9
2	Riemannsommen.....	10
2.1	Voorbeeld.....	10
2.2	Ander voorbeeld.....	12
2.3	Opdracht 4.....	12
2.4	Definities.....	15
3	Riemannsommen met grm en rijen.....	18
3.1	Vorbereiding van de instellingen.....	18
3.2	Instellingen algemeen (dit is geen opdracht).....	18
3.3	Opdracht 5.....	19
4	De bepaalde integraal.....	21
4.1	Opdracht 6.....	21
4.2	Opdracht 7.....	21
4.3	Definitie van bepaalde integraal.....	22
4.4	Opdracht 8.....	23

¹ Deze tekst werd ons ter beschikking gesteld door Bernard Folens,

1 Rijvariabelen u en v van het grafisch rekentoestel

1.1 Rijen

Zet de rijen verder:

1	4	7	10
125	105	85	65

De elementen van een rij noemt men termen.

Iedere term heeft een plaats, een volgnummer. Dat volgnummer noemt men de rijindex.

Wij zullen als beginindex altijd 1 kiezen.

Notaties:

rijen worden genoteerd met kleine letters t, u, v, w, \dots

u_{12} is de 12^{de} term van de rij u . Een term wordt genoteerd met de rijnaam en zijn volgnummer.

In wiskundeteksten noteert men de index in subscript onmiddellijk naast de rijnaam.

De syntaxis van de grm zou zijn $u(12)$.

Met de kleine letter n wordt in het rekentoestel de index (volgnummer) van een willekeurige algemene term aangeduid.

1.2 Opdracht 1

Stel dat we de eerste rij hierboven (punt 1.1) met u benoemen.

Geef de notatie van de 9de term van deze rij van de wiskunde en van de grm.

.....

Geef beide notaties van de algemene term van de rij u :

Hoe noteer je (beide notaties) de term voorafgaand aan de algemene term?

.....

Hoe vind je in de rij u de algemene term als je zijn voorafgaande term kent? Gebruik de beide notaties en schrijf formeel op.

.....

Is de formule voor de algemene term voldoende om de rij u volledig te kennen ?

.....

Stel dat we de tweede rij v noemen. Beantwoord nu dezelfde vragen voor v .

de 9de term van v :

de algemene term van v :

de term voorafgaand aan de algemene term:

de algemene term in functie van zijn voorafgaande:

.....

De rij v is na de algemene term pas volledig gedefinieerd met

1.3 Rekentoestel

De grm kent 3 rijvariabelen u, v en w .

Deze variabelen kun je oproepen met de toetsen-combinaties (zie Fig 1):

$\langle 2nd \rangle + \langle 7 \rangle$ $\langle 2nd \rangle + \langle 8 \rangle$ $\langle 2nd \rangle + \langle 9 \rangle$.

De rijen definieer je in een speciaal venster dat je bekomt door de grm op rijen (= sequences) in te stellen.

Die instelling bekom je via de toets $\langle \text{MODE} \rangle$ (Fig 1) en het scherm van Fig 2. Selecteer 'SEQ'

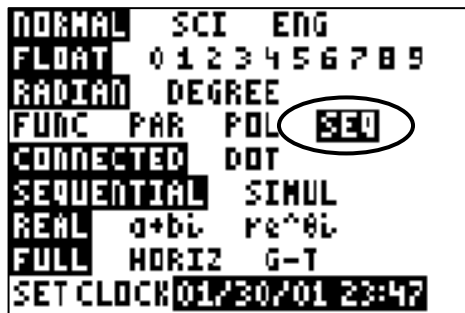


Fig 2

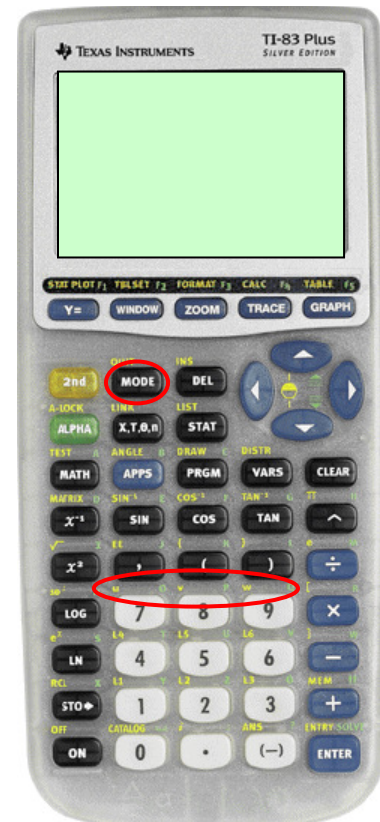


Fig 1

Ga naar het rijenvenster (vb.

vanuit het basisscherm) met $\langle Y=\rangle$.

Je bekomt het scherm van Fig 3

Met n wordt de rijindex voorgesteld. Als je een formule wilt maken waarin de rijindex n voorkomt dan verkrijg je die door op de toets $\langle X, T, \theta, n \rangle$ (zie Fig 1) te drukken.

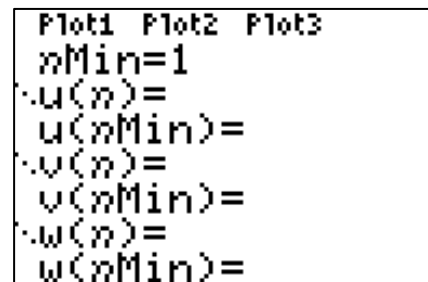


Fig 3

Verklaring van de symbolen van het rijenvenster: $nMin$ is het volgnummer dat je geeft aan het eerste element in de rijen u, v en w . Wij nemen altijd als waarde 1. Vandaar $nMin=1$.

Met $u(n)=$ kun je een formule invoeren om de n^{de} term (alg. term) te berekenen. $u(nMin)$ is de startwaarde van de rij u .

Opeenvolgende termen van een rij kunnen op het basisscherm getoond worden met de functie **seq**. Deze functie vind je (zie Fig 1) via "**<2nd><LIST> OPS 5: seq**(" en ze heeft 4 parameters:

seq(rijvariabele(index), indexnaam, beginindex, eindindex)

Zo toon je, indien de rij u gedefinieerd is, met **seq(u(n), n, 10, 14)** de termen: $u(10)$, $u(11)$, $u(12)$, $u(13)$ en $u(14)$ (zie verder 1.4 Opdracht 2).

Als je alleen de honderdste term van rij u wilt tonen, dan voer je het volgende in:

<2nd> <7>(100).

Dit levert in het basisscherm: $u(100)$

1.4 Opdracht 2

Definieer de rijen u en v van het punt 1.1 van p.7 in uw grm.

Toon $u(65)$ en $v(51)$.

Toon de vijf eerste termen van elke rij.

Verander de instelling van de grm terug om een functievoorschrift te kunnen invoeren.

1.5 Opdracht 3

Vat hier samen wat je weet over rijen en hoe de grm hierbij kan gebruikt worden.

2 Riemansommen

Bij Riemansommen heb je altijd een functie f nodig en een interval $[a, b]$ binnen het domein van f . Dit interval zal altijd verdeeld worden in een aantal (1 of meer) deelintervallen.

Bereken de lengte van één deelinterval indien je het interval $[2, 7]$ in 25 gelijke deelintervallen verdeelt.

De lengte van deze deelintervallen zullen wij Δx noemen.

2.1 Voorbeeld.

Stel dat f de functie is met voorschrift $f(x) = x^2 - 2x + 2$. In het interval $[0,5; 2,5]$ heeft f altijd beelden: zie Fig 4

Het getal $\frac{49}{16}$ is één van de mogelijke

Riemansommen van f over $[0,5; 2,5]$ verdeeld in 2 deelintervallen. Hieronder wordt beschreven hoe dat getal gevonden werd.

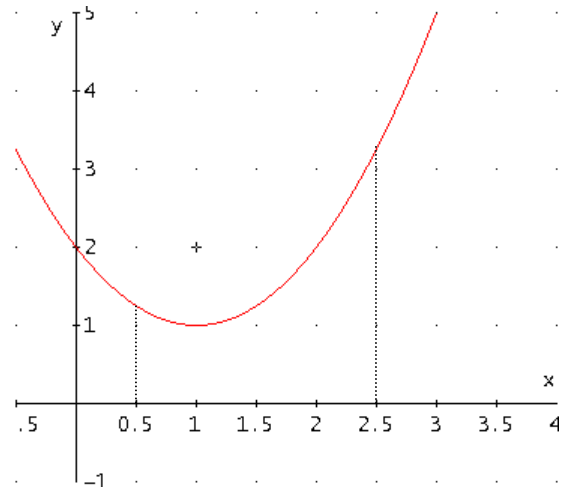


Fig 4

Onthoud: een Riemansom is een getal.

Berekening van de Riemansom die $\frac{49}{16}$ oplevert.

De deelintervallen zijn $[0,5; 1,5]$ en $[1,5; 2,5]$, en de som ontstaat, door telkens de lengte van het deelinterval te vermenigvuldigen met één van de beelden uit het deelinterval en dit alles op te tellen:

$$\begin{aligned} & (1,5 - 0,5) \cdot f(0,75) + (2,5 - 1,5) \cdot f(2) \\ &= 1 \cdot f(0,75) + 1 \cdot f(2) \\ &= 3,0625 = \frac{49}{16} \text{ (Controleer!)} \end{aligned}$$

Hierbij geldt:

$(1,5 - 0,5) = (2,5 - 1,5) = \Delta x$ is de lengte van de deelintervallen

$f(0,75)$ en $f(2)$ zijn beelden van vrij gekozen x-waarden uit elk interval:

$$0,5 \leq 0,75 \leq 1,5 \text{ en } 1,5 \leq 2 \leq 2,5$$

Teken op de grafiek (Fig 5) de deelintervallen $[0,5; 1,5]$ en $[1,5; 2,5]$; en dan rechthoeken met die deelintervallen als basis hebben ($= \Delta x$) en hoogten resp. $f(0,75)$ en $f(2)$.

Wat is de som van de oppervlakten van die rechthoeken?

Dit geeft u al een idee van de grafische betekenis van wat het getal $\frac{49}{16}$ is, dat we een Riemansom genoemd hebben.

Verder zullen we die grafische betekenis verfijnen.

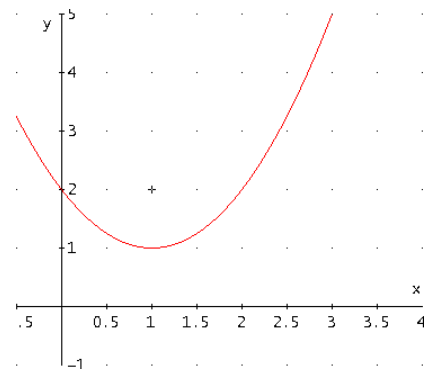


Fig 5

Indien je bij een Riemansom in ieder deelinterval juist die x-waarde kiest die het kleinste beeld heeft, dan spreekt men van een ondersom. Kies je echter in elk deelinterval de x-waarde die het grootste beeld heeft, dan spreekt men van een bovensom.

Als je bij 2 verdelingen de ondersom voorstelt door \underline{s}_2 en de bovensom door \underline{S}_2 , wat geldt dan altijd voor hun waarde (grootte)?

Bereken de waarde van de ondersom \underline{s}_2 en de bovensom \underline{S}_2 van f over $[0,5; 2,5]$?

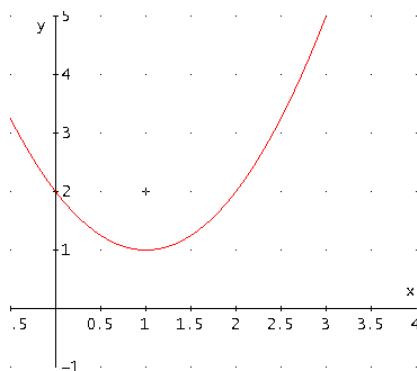


Fig 6

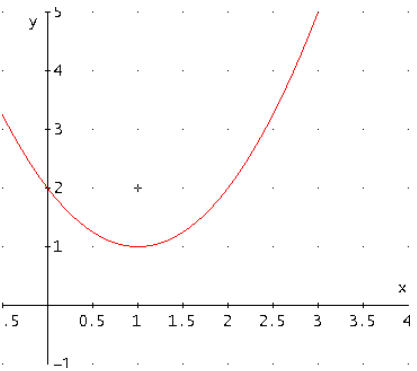


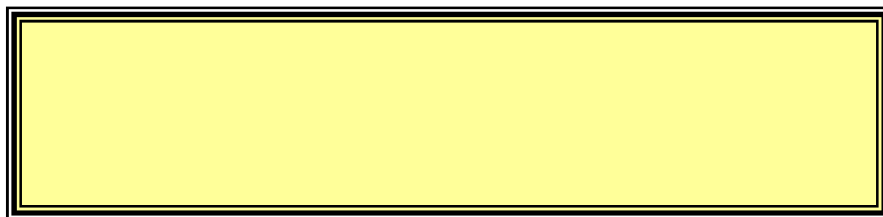
Fig 7

Stel de ondersom \underline{s}_2 voor

op Fig 6 en de bovensom \underline{S}_2 voor op Fig 7.

Indien je bij een Riemansom in ieder deelinterval een x-waarde kiest die een beeld heeft dat noch het kleinste, noch het grootste is dan spreekt men van een tussensom.

Tussen een ondersom \underline{s}_p , een tussensom s_p en een bovensom \underline{S}_p bij p verdelingen geldt altijd de volgende relatie (wat hun grootte betreft):



2.2 Ander voorbeeld.

We behouden de functie met voorschrift $f(x) = x^2 - 2x + 2$ en verdelen het interval $[0,5; 2,5]$ nu in 3 deelintervallen: $\Delta x = \dots\dots\dots$

Schrijf de drie intervallen op met breuknotaties en kies in elk interval de x-waarde voor de ondersom en de x-waarde voor de bovensom. Voor de tussensom kies je de middelste waarde van ieder deelinterval.

Bereken nu de drie Riemansommen.

2.3 Opdracht 4

Definieer de functie met voorschrift $f(x) = 3 + 2x - x^2$ in uw grm.

Verdeel het interval $[-2, 1]$ in 5 gelijke delen. Bereken de lengte van ieder deel interval.

Schrijf alle deelintervallen op.

Schrijf de rij van de beginwaarden resp. de rij van alle eindwaarden van elk deelinterval en geef die waarden als namen x_1, x_2, \dots

Beginwaarden	Eindwaarden
$x_1 = \dots\dots\dots$	$x_1 = \dots\dots\dots$
$x_2 =$	$x_2 =$

Hoeveel is het verschil tussen 2 opeenvolgende termen van elke rij?

Noem dat verschil Δx .

$$\Delta x =$$

Hoe kun je elke term in één van de rijen berekenen met behulp van de voorgaande?

Gebruik alleen namen en geen waarden.

$$x_2 = \quad \quad \quad (\text{hoe vind je } x_2 \text{ met } x_1)$$

$$x_3 =$$

...

Als je een interval $[a, b]$ in p gelijke deelintervallen verdeelt, maak dan een formule om altijd de lengte van deelinterval te kunnen berekenen. Noem die lengte Δx .

$$\Delta x =$$

Met uw rekentoestel zullen we die waarde altijd in het geheugen D (Delta) opslaan.

Wat is het verband tussen een algemene term x_n en zijn voorganger?

Hoe zou je dit schrijven met de syntaxis van uw grm?

Als je een interval $[a, b]$ in p gelijke deelintervallen verdeelt, dan loopt het eerste deelinterval van tot

Het tweede deelinterval is [.....,]]

Het derde deelinterval is [.....,]]

enz...

Het laatste deelinterval is [.....,]]

Herneem de functie $f(x) = 3 + 2x - x^2$ en het interval $[-2, 1]$ dat in 5 delen verdeeld is. Sla de waarde van Δx op in het geheugen D (cf. delta).

Definieer de rijvariabele u die de beginwaarden van de deelintervallen bevat en genereer die op het basisscherm .

Roep daarna ook eens alleen de beginwaarde van het laatste interval op.

Doe nu hetzelfde voor de rij met de eindwaarden.

Kies het voorlaatste (=vierde) interval en de waarde x_4 aan het begin van dat interval.

Teken de rechthoek met oppervlakte $\Delta x \cdot f(x_4)$ op Fig 8. Kleur die oppervlakte en bereken ze.

Bekijk nu het eerste deelinterval.

Bereken $\Delta x \cdot f(x_1)$ met x_1 het eindpunt van het interval.

Waarom kan dit geen oppervlakte zijn?

Wat is het dan wel?

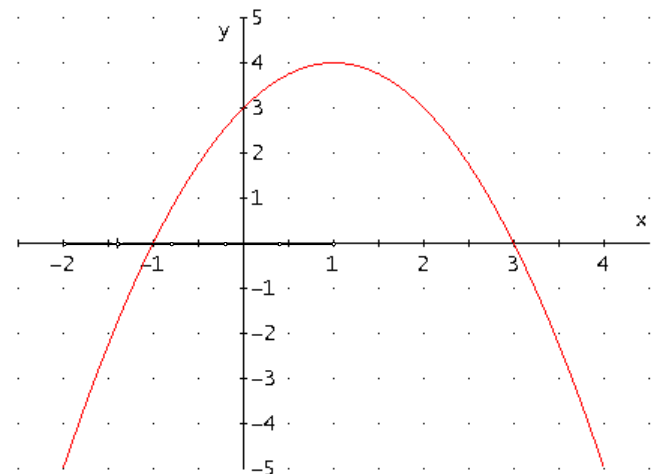


Fig 8

Stel $\Delta x \cdot f(x_1)$ toch voor met een rechthoek in een ander kleur op Fig 8. We zullen spreken van georiënteerde oppervlakte: een oppervlakte voorafgegaan door een plus- of een minteken

Bereken nu de som:

$$\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \Delta x \cdot f(x_3) + \Delta x \cdot f(x_4) + \Delta x \cdot f(x_5)$$

met x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5 de beginpunten van elk deelinterval.

Een som zoals $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \Delta x \cdot f(x_3) + \Delta x \cdot f(x_4) + \Delta x \cdot f(x_5)$ ontstaan door het interval $[-2, 1]$ in 5 deelintervallen te verdelen en uit elk deelinterval het beeld van één x-waarde te kiezen, is zoals hoger reeds vermeld een Riemannsom. Grafisch is dit getal de som van de georiënteerde oppervlakten van de rechthoeken boven of onder de deelintervallen.

2.4 Definities.

Als f een functie is en $[a, b]$ een interval is binnen het domein van f in p deelintervallen verdeeld is, dan noemt men de som:

$$\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_p)$$

$$\text{met } \Delta x = \frac{b-a}{p}$$

en x_1, x_2, \dots, x_p : x-waarden willekeurig gekozen in elk deelinterval;
een Riemannsom.

Indien je in elk deelinterval de x-waarde kiest met het voor dat deelinterval, kleinste beeld (Fig 9), dan spreekt men van een **ondersom**.

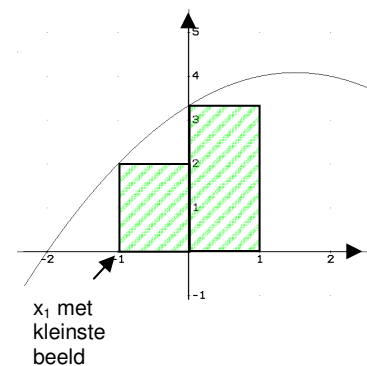


Fig 9

Kies je in elk deelinterval de x -waarde met het grootste beeld (Fig 10), dan spreekt men van een **bovensom**.

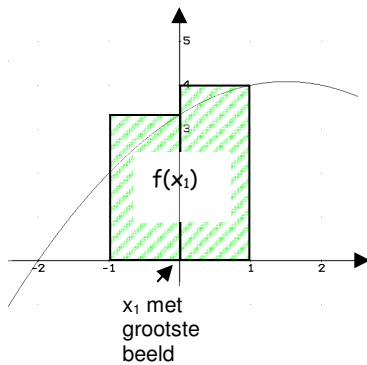


Fig 10

Eén deelinterval kan maar één ondersom (= 1 getal) en één bovensom hebben.

Kies je een willekeurige x -waarde die niet het kleinste of het grootste beeld heeft dan zal het beeld een waarde hebben **tussen** het kleinste en het grootste beeld.

De Riemanssom noemt men dan een **tussensom**.

Zie Fig 11.

In wat volgt zullen wij ondersommen voorstellen met een kleine, onderstreepte letter met in subscript het aantal verdelingen: \underline{s}_p = ondersom wanneer het interval in p delen is verdeeld. Analoog is s_p een tussensom en S_p de bovensom.

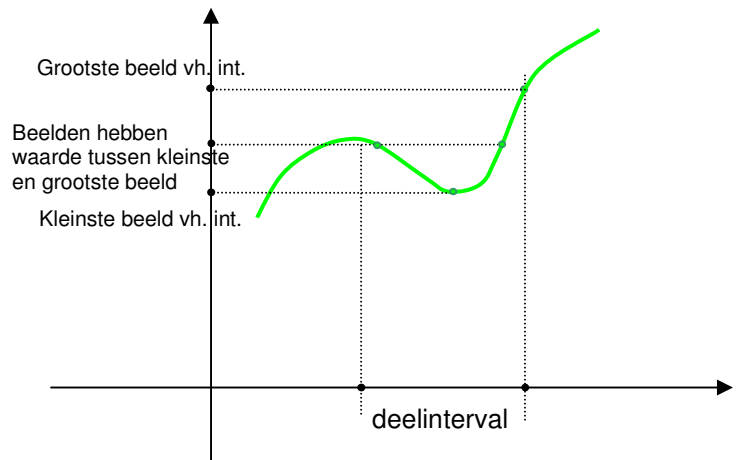


Fig 11

Wat gebeurt er met de waarde van de ondersom \underline{s}_p indien p (= aantal verdelingen) vergroot wordt?

Is het mogelijk dat een ondersom een grotere waarde krijgt dan een willekeurige bovensom?

Wat gebeurt er met de waarde van de bovensom S_p indien p vergroot wordt?

Is het mogelijk dat een bovensom een kleinere waarde krijgt dan een willekeurige ondersom?

Is het mogelijk dat een tussensom een kleinere waarde krijgt dan een willekeurige ondersom of een grotere waarde krijgt dan een willekeurige bovensom?

3 Riemansommen met grm en rijen

3.1 Voorbereiding van de instellingen

Om Riemansommen met rijen te genereren, bereken je eerst $\Delta x = \frac{b-a}{p}$.

De x-waarden genereer je met de rij u .

De rij v bevat de georiënteerde oppervlakte boven of onder het interval van de actuele x-waarde plus de som van alle georiënteerde oppervlakten van de voorafgaande intervallen.

D.w.z. aan een willekeurige term v_n van de rij v ken je de waarde toe gelijk aan $\Delta x \cdot f(x_n)$ plus de waarde van de vorige term uit de rij v .

Op die manier hebben de opeenvolgende termen van de rij v de volgende inhoud.

$$\text{De startwaarde } v_1 = \Delta x \cdot f(x_1) \quad (1).$$

$$\begin{aligned} \text{Op die manier zal } v_2 &= \Delta x \cdot f(x_2) + v_1 \\ &\text{(wegens (1))} \\ &= \Delta x \cdot f(x_2) + \Delta x \cdot f(x_1) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Vul zelf in } v_3 =$$

$$v_4 =$$

enz... .

Wat bevat de laatste term van de rij v door deze definities uiteindelijk altijd?

3.2 Instellingen algemeen (dit is geen opdracht).

- Stel <Mode> in op 'Func' en definieer de functie
- Bereken de lengte van de deelintervallen indien het interval [a, b] in p delen wordt verdeeld: $\Delta x = \frac{b-a}{p}$. Stockeer die waarde in D (Sto -> D)
- Stel <Mode> in op 'Seq'
- Definieer de waarden van x1, x2, ..., met de rijvariabele u via <Y=>
 $nMin = 1$
 $u(n) = u(n-1) + D$
 $u(nMin) =$ waarde uit eerste deelinterval: bij O.S. x-waarde met kleinste beeld - BS-grootste beeld
- De v-variabele (<2nd> 8) berekent (de "opp." boven / onder het deelinterval) + (de som van de voorgaande "oppervlakten").

Definieer de rijvariabele v (<2nd> 8) via <Y=>

$$v(n) = v(n-1) + Y1(u)*D$$

$$v(nMin) = Y1(u(nMin))*D \text{ (de waarde van } u(nMin) \text{ aflezen - overschrijven of opnieuw berekenen vb } a+D).$$

Het eindresultaat, de Riemansom, vind je met $v(p)$ in het basisscherm.

3.3 Opdracht 5

Herneem de functie met voorschrift $f(x) = 3 + 2x - x^2$ van Opdracht 4 en de verdeling van het interval $[-2, 1]$ in 5 gelijke delen.

D bevat

Definieer in het venster van de rijdefinities de rijen u en v , voor de ondersom.

Doe dat overeenstemmend met wat hiervoor in (3.1 en 3.2) besproken werd.

$$u(n)=$$

$$u(nMin) =$$

$$v(n)=$$

$$v(nMin)$$

Genereer alle x -waarden met de rij u

Kijk nu welke overeenkomstige waarden de rij v hiervoor berekent. Wat stellen die getallen voor? Kijk hoe de waarden evolueren.

Bereken de laatste term van rij v afzonderlijk. Dat is de ondersom \underline{s}_5 .

Verander in het rijvenster alle instellingen om de bovensom S_5 te kunnen berekenen en maak dezelfde berekeningen als in 1) 2) 3).

$$u(n)=$$

$$u(nMin) =$$

$$v(n)=$$

$$v(nMin)$$

Verander in het rijvenster alle instellingen om een tussensom s_5 te kunnen berekenen en maak dezelfde berekeningen als in 1) 2) 3). Kies de x-waarden eerst eens in het midden van ieder deelinterval. Voor een andere tussensom kun je de x-waarden eens op $\frac{\Delta x}{10}$ van het einde van ieder interval kiezen.

$$u(n)=$$

$$u(nMin) =$$

$$v(n)=$$

$$v(nMin)$$

en

$$u(n)=$$

$$u(nMin) =$$

$$v(n)=$$

$$v(nMin)$$

4 De bepaalde integraal

Als in het vervolg niet uitdrukkelijk vermeld is, dan nemen we voor tussensommen telkens x -waarden die in het midden van ieder deelinterval liggen.

4.1 Opdracht 6

Beschouw de functie met voorschrift $f(x) = x^2$ en het interval $[0,3]$.

1. Maak een tabel met in de kolommen \underline{s}_p , s_p , S_p voor het aantal verdelingen $p = 10, 50, 100, 500$

p	Δx	\underline{s}_p	s_p	S_p
10				
50				
100				
500				

2. Welk kenmerk (stijgend, dalend, onbepaald) kun je vaststellen bij de rij van de ondersommen \underline{s} als het aantal verdelingen toeneemt? Wat stel je vast bij de rij S van de bovensommen?
3. Verder geldt nog altijd voor de grootte van elke term van de rij van ondersommen, tussensommen en bovensommen:
4. Wat kun je uit 2) en 3) besluiten indien je aan p steeds grotere waarden toekent?

4.2 Opdracht 7

Analoog als Opdracht 6 maar met de functie $f(x) = 3 + 2x - x^2$ en het interval $[-2,1]$.

4.3 Definitie van bepaalde integraal

De rij van ondersommen, tussensommen en bovensommen van Opdracht 6 nadert naar het getal 9. Dat getal 9 noemt men de bepaalde integraal van de functie met voorschrift $f(x) = x^2$ over het interval $[0, 3]$.

Dat wordt genoteerd met $\int_0^3 x^2 dx = 9$

Een bepaalde integraal is een getal waar de ondersommen, bovensommen en tussensommen op uitmonden als het aantal verdelingen onbeperkt groot wordt (zie Fig 12).

Analoog stel je vast dat de rij van ondersommen, tussensommen en bovensommen van Opdracht 7 naderen naar het getal 3.

Dat wordt genoteerd met $\int_{-2}^1 (3 + 2x - x^2) dx = 3$

Lees dat als "de bepaalde integraal van de functie met voorschrift $f(x) = 3 + 2x - x^2$ over het interval $[-2, 1]$ is het getal 3".

Eigenlijk geldt voor ondersommen, tussensommen en bovensommen van een functie met voorschrift $f(x)$ en een interval $[a, b]$ altijd het volgende:

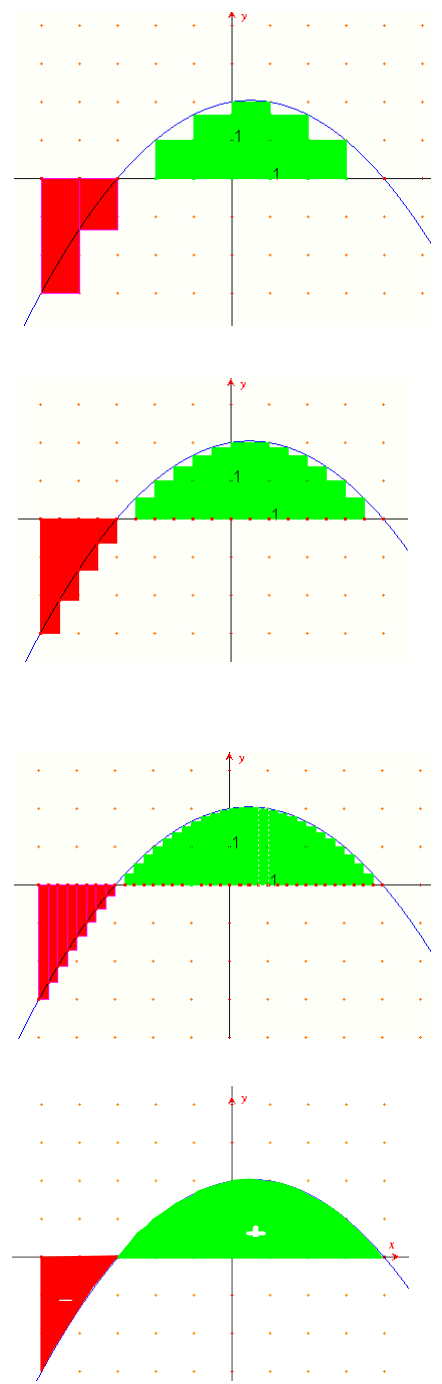
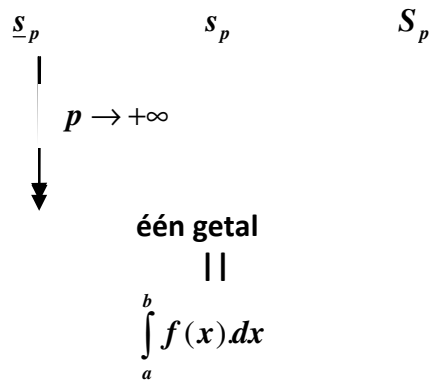


Fig 12

Algemeen geldt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} [f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_p) \cdot \Delta x]$$

met $\Delta x = \frac{b-a}{p}$
en $f(x_i)$ van $[a + (i-1)\Delta x, a+i\Delta x]$

Integralen kan men rechtstreeks met het rekentoestel berekenen met de functie **fnInt** die je vindt via "**<MATH>/9:fnInt**". Deze functie heeft 4 parameters:

fnInt(voorschrift, variabele, ondergrens, bovengrens)

De syntaxis voor $\int_0^3 x^2 dx$ is **fnInt(X², X, 0, 3)**

Op een grafiek komt de waarde van een bepaalde integraal overeen met de som van de oppervlakten (een opp. is altijd een positief getal) van de x-as tot aan de kromme voor de gedeelten die boven de x-as uitsteken, verminderd met de som van analoge oppervlakten van de gedeelten die onder de x-as uitkomen. Soms noemt men dat resultaat een **georiënteerde oppervlakte**. (zie Fig 13)

4.4 Opdracht 8

Bereken $\int_1^4 (0,2x^3 - 1,4x^2 + 1,4x + 5) dx$ met behulp van \underline{s}_p , s_p , S_p en $p = 50, 100$ en 250 .

Geef de waarde van die integraal ook in breukvorm. Controleer met de functie **fnInt**.